Ödev2 Rapor  
  
**ÖDEV 2: BİR DTFT FONKSİYONUNUN GENLİK VE FAZ SPEKTRUM ANALİZİ**

**Giriş**

Bu çalışmanın amacı, belirli bir Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü (DTFT) ile tanımlanan bir sistemin frekans yanıtını incelemektir. Analiz edilen DTFT fonksiyonu, N-noktalı bir dikdörtgen pencere veya eşdeğer olarak, N-noktalı basit bir hareketli ortalama filtresinin dürtü yanıtının (h[n] = 1 for 0 ≤ n ≤ N-1, 0 otherwise) dönüşümüdür ve şu şekilde ifade edilir:

H(e^jΩ) = Σ\_{n=0}^{N-1} (e^{-jΩ})^n

Bu geometrik serinin toplamı için kapalı form ifadesi şu şekildedir:

H(e^jΩ) = (1 - e^{-jΩN}) / (1 - e^{-jΩ}) (Ω ≠ 2kπ için)

Bu çalışma kapsamında, bu frekans yanıtının H(e^jΩ) genlik (|H(e^jΩ)|) ve faz (∠H(e^jΩ)) spektrumları, farklı N değerleri (N = 3, 6, 9, 21) için Python ortamında hesaplanmış ve -2π ile 2π radyan aralığında çizdirilmiştir.

**Yöntem**

Genlik ve faz spektrumlarının hesaplanması ve görselleştirilmesi için Python programlama dili ve NumPy ile Matplotlib kütüphaneleri kullanılmıştır.

1. **Frekans Vektörü:** Analiz için -2π ile 2π aralığında 0.1 radyanlık adımlarla ayrık frekans değerleri (Ω) içeren bir NumPy dizisi oluşturulmuştur (np.arange(-2\*np.pi, 2\*np.pi, 0.1)).
2. **DTFT Hesaplanması:** Belirlenen her bir N değeri (3, 6, 9, 21) için, yukarıda verilen kapalı formül kullanılarak H(e^jΩ)'nın kompleks değerleri hesaplanmıştır.
3. **Sayısal Kararlılık:** Formülün paydasında bulunan 1 - e^{-jΩ} terimi, Ω'nın 2π'nin katları olduğu durumlarda sıfır olur. Bu durum, doğrudan hesaplamada sıfıra bölme hatasına yol açabilir. Bu sorunu aşmak için, paydanın mutlak değeri çok küçük (belirlenen bir epsilon 1e-12 değerinden küçük) olduğunda, payda yerine bu küçük epsilon değeri kullanılarak sayısal kararlılık sağlanmıştır.
4. **Genlik ve Faz Hesabı:** Hesaplanan kompleks H(e^jΩ) değerlerinin her biri için:
   * Genlik spektrumu np.abs(H) fonksiyonu ile hesaplanmıştır.
   * Faz spektrumu np.angle(H) fonksiyonu ile (radyan cinsinden) hesaplanmıştır.
5. **Görselleştirme:** Her bir N değeri için genlik ve faz spektrumları ayrı Matplotlib alt grafikleri (subplots) kullanılarak çizdirilmiştir. Grafikler, frekansa (Ω) karşı genlik ve fazı göstermektedir. Eksenler etiketlendirilmiş ve daha iyi okunabilirlik için ızgara çizgileri eklenmiştir.

**Sonuçlar ve Tartışma**

Elde edilen genlik ve faz spektrumları aşağıdaki grafiklerde sunulmuştur. (Raporun bu kısmına Python kodunun ürettiği grafikler eklenecektir).

**(Grafik 1: N=3 için Genlik ve Faz Spektrumu - Kodun çıktısı buraya eklenecek)**  
**(Grafik 2: N=6 için Genlik ve Faz Spektrumu - Kodun çıktısı buraya eklenecek)**  
**(Grafik 3: N=9 için Genlik ve Faz Spektrumu - Kodun çıktısı buraya eklenecek)**  
**(Grafik 4: N=21 için Genlik ve Faz Spektrumu - Kodun çıktısı buraya eklenecek)**

Grafiklerden aşağıdaki gözlemler yapılabilir:

* **Genlik Spektrumu (|H(e^jΩ)|):**
  + Genlik spektrumu, periyodik bir yapıya sahiptir ve temel periyodu 2π'dir.
  + Maksimum genlik değeri Ω = 0 (ve 2π'nin katları) civarında gözlemlenir. Bu frekanslarda H(e^j0) = Σ\_{n=0}^{N-1} (1)^n = N olduğundan, teorik olarak beklenen maksimum değer N'dir. Grafikler bu beklentiyi doğrulamaktadır.
  + Spektrum, "sinc" fonksiyonuna benzeyen ana bir lob (main lobe) ve yan loblardan (side lobes) oluşur. Bu yapı, Dirichlet çekirdeği olarak da bilinir.
  + N değeri arttıkça:
    - Ana lob daralır ve tepe değeri (N) artar. Bu, frekans seçiciliğinin arttığını gösterir (yani filtre daha dar bir frekans bandına odaklanır).
    - Yan lobların sayısı artar ve genellikle göreceli genlikleri azalır.
    - Sıfır geçişlerinin (nulls) sayısı artar. İlk sıfır geçişi yaklaşık olarak Ω = 2π/N civarında meydana gelir.
* **Faz Spektrumu (∠H(e^jΩ)):**
  + Faz spektrumu, parçalı doğrusal (piecewise linear) bir yapı gösterir.
  + Genlik spektrumundaki sıfır geçişlerine karşılık gelen noktalarda fazda ±π radyanlık ani sıçramalar (faz atlamaları) gözlemlenir. Bu sıçramalar, H(e^jΩ)'nın işaret değiştirdiği noktalardır.
  + Genel olarak faz, frekansla doğrusal olarak değişme eğilimindedir (sıçramalar hariç), bu da sistemin yaklaşık olarak doğrusal bir faza sahip olduğunu ve belirli bir grup gecikmesi (group delay) olduğunu gösterir. Bu gecikme, dikdörtgen pencerenin merkezi olan (N-1)/2 ile ilişkilidir.
  + N değeri arttıkça, faz spektrumundaki doğrusal segmentlerin ve faz atlamalarının sayısı artar, yani faz yapısı daha karmaşık hale gelir.

**Sonuç**

Bu çalışmada, N-noktalı bir dikdörtgen pencerenin DTFT'si olan H(e^jΩ) fonksiyonunun genlik ve faz spektrumları, N=3, 6, 9 ve 21 değerleri için Python kullanılarak başarıyla hesaplanmış ve görselleştirilmiştir. Sonuçlar, N parametresinin sistemin frekans yanıtı üzerindeki etkisini açıkça göstermiştir. N arttıkça, sistemin alçak geçiren filtre karakteristiği belirginleşir, frekans seçiciliği artar (ana lob daralır) ve faz yapısı daha karmaşık hale gelir. Uygulanan sayısal yöntemler ve elde edilen grafikler, teorik beklentilerle uyumludur.